Étude de fonctions – Exercices

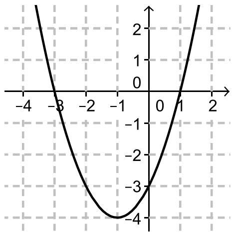
Rappel sur le signe et les variations d'une fonction

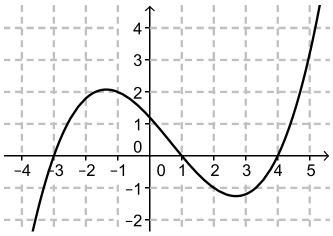
1 Soit f une fonction dont le tableau de signe est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1. Déterminer les signes de $f(3)$, $f(-1)$, $f(-4{,}71)$ et $f(1)$.
2. Résoudre $f(x) = 0$, $f(x) \geq 0$ et $f(x) < 0$.

2 Dresser les tableaux de signe puis de variations des fonctions représentées ci-dessous.

a.


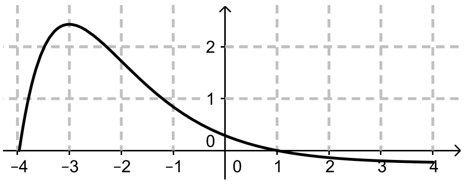
b.


3 Donner le signe des fonctions suivantes.

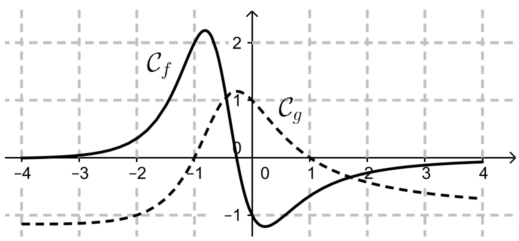
$f_1(x) = 2x - 4$ $\quad$ $f_2(x) = -3x + 2$
$f_3(x) = 7x + 14$ $\quad$ $f_4(x) = 2 - 4x$
$f_5(x) = 2x^2 - 5x + 3$ $\quad$ $f_6(x) = x^2 - 2x + 3$
$f_7(x) = 6x^2 + 3x$ $\quad$ $f_8(x) = 4x + x^2 + 4$

Rappel sur la dérivée

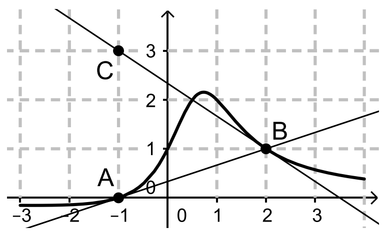
4 On considère une fonction f définie sur $[-4; 4]$ dont la courbe est donnée ci-dessous.
Construire le tableau de signe de f, puis celui de f'.



5 On a représenté ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g définies sur $[-4; 4]$.
L'une de ces fonctions est la dérivée de l'autre. A-t-on $f' = g$ ou $g' = f$?

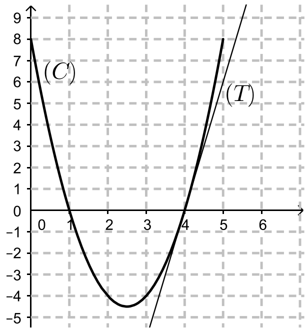


6 On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[-3; 4]$.



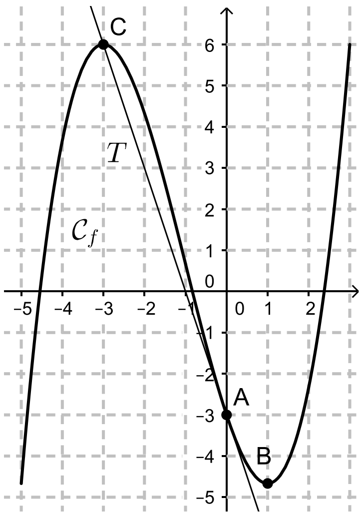
Les points $A(-1; 0)$ et $B(2; 1)$ appartiennent à $\mathcal{C}_f$ et C a pour coordonnées $(-1; 3)$. La droite (AB) est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A et la droite (BC) est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en B.
Déterminer $f'(-1)$ et $f'(2)$.

7 *(2013, Antilles-Guyane, ES).* On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 5]$ dont la courbe représentative (C) est donnée en annexe. Le point $A(4; 0)$ appartient à la courbe (C) et la droite (d) est la tangente à la courbe (C) au point A.



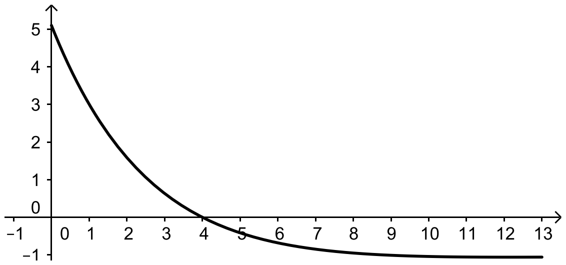
1. Le minimum de la fonction f est :
a. 0 **b.** $2{,}5$ **c.** $-4{,}5$
2. $f'(4) =$
a. 0 **b.** 6 **c.** $\frac{1}{6}$
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[1; 2]$,
a. $f'(x) \leq 0$ **b.** $f'(x) = 0$ **c.** $f'(x) \geq 0$
4. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 6$ est
a. 0 **b.** 3 **c.** 2
5. La fonction f a pour expression
a. $2x^2 - 10x + 8$ **b.** $2x^2 - 10x$
c. $2x + 8$

8 *(2014, centres étrangers).* On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-5; 3]$ dont la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-contre.



Soit A le point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(0; -3)$, B et C les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectivement égales à 1 et à -3.
La tangente T en A à $\mathcal{C}_f$ passe par le point C. Les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points B et C sont horizontales.
1. $f(1)$ est égal à :
a. -3 **b.** $2{,}3$
c. -1 **d.** $-4{,}6$
2. Le nombre dérivé en 0 de la fonction f est égal à :
a. -3 **b.** $2{,}3$
c. -1 **d.** $-4{,}6$
3. Une équation de la tangente T est
a. $y = -3x - 3$ **b.** $y = -x - 3$
c. $y = -3x$ **d.** $y = -3$
4. Sur l'intervalle $[-4; -2]$ on peut affirmer que
a. f' est positive **b.** f' change de signe
c. f' est partout nulle **d.** f' est négative

9 *(2015, Liban, ES).* On considère une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 13]$ et on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction g' sur l'intervalle $[0; 13]$.
Vrai ou faux ? Justifier. La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; 4]$.



Étude de fonctions polynômes

10 Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

$f_1(x) = x^2$ $\quad f_2(x) = 5x^2$

$f_3(x) = 5x^2 + 3$ $\quad f_4(x) = x^3 + 2x$

$f_5(x) = -2x^2 + 0{,}7x - 1$ $\quad f_6(x) = 2x - 1{,}2x^3$

$f_7(x) = 3x^5 - 0{,}25x^4$ $\quad f_8(x) = x^{10} - \frac{1}{3}x^9$

11 Soit f la fonction définie sur $[-2; 3]$ par

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 3.$$

1. Tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice. Quelles semblent être les variations de f ?
2. Calculer la dérivée de f et étudier son signe. En déduire les variations de f.

12 Soit f la fonction définie sur $[-3; 3]$ par

$$f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 2.$$

1. Tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice. Quelles semblent être les variations de f ?
2. Calculer la dérivée de f et étudier son signe. En déduire les variations de f.

13 *(2013, Antilles-Guyane).* Une entreprise fabrique un modèle de meuble en bois. Elle peut produire au maximum 100 meubles par jour.

Pour x meubles fabriqués et vendus, le coût de production journalier (exprimé en euros), noté $C(x)$, est donné par :

$$C(x) = 2{,}25x^2 - 6x + 20.$$

Chaque meuble est vendu 299 €.

L'entreprise est ouverte cinq jours par semaine.

Le chef d'entreprise a réalisé la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D
1	x	Recette	Coût	Bénéfice
2	0	0	20	–20
3	10	2990	185	2805
4	20			
5	30			
6	40			
7	50			
8	60			
9	70			
10	80			
11	90			
12	100			

1. **a.** Donner une formule qui, saisie dans la cellule B2, permet d'obtenir par recopie vers le bas, la recette en fonction du nombre de meubles fabriqués et vendus chaque jour.
   b. Donner une formule qui, saisie dans la cellule C2, permet d'obtenir, par recopie vers le bas, le coût en fonction du nombre de meubles fabriqués et vendus chaque jour.
   c. Calculer les valeurs associées aux cellules B7, C7 et D7.
2. Montrer que le bénéfice journalier correspondant à la production et la vente de x meubles ($x \in [0; 100]$) est donné par $B(x) = -2{,}25x^2 + 305x - 20$.
3. Calculer $B'(x)$ et donner le tableau de variations de B sur $[0; 100]$.
4. Combien de meubles faut-il produire et vendre pour réaliser un bénéfice journalier maximal ? Déterminer le bénéfice maximal que peut réaliser l'entreprise sur une période de quatre semaines.

14 *(2014, Antilles-Guyane).*
On s'intéresse à la propagation d'une maladie dans une ville de 130 000 habitants. La fonction f définie sur l'intervalle $[0; 40]$ par

$$f(t) = -30t^2 + 1200t + 4000$$

modélise le nombre de personnes touchées par la maladie au bout de t jours de suivi de la propagation.

Partie A – Étude graphique

On donne la courbe représentative de la fonction f.

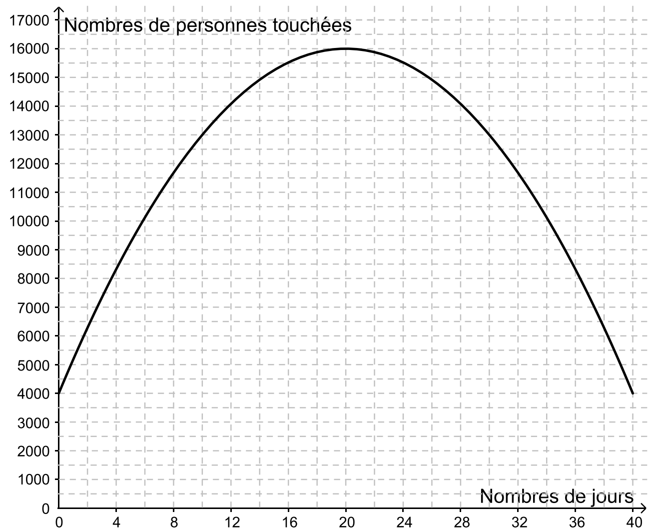
Répondre aux questions ci-dessous par lecture graphique.

Les résultats seront justifiés en commentant le travail réalisé sur le graphique et en y laissant les traits de construction.

1. Déterminer le nombre de personnes touchées par la maladie au bout de 15 jours de suivi de la propagation.
2. Le conseil municipal a décidé de fermer les crèches de la ville lorsque plus de 10 % de la population est touchée par la maladie. Pendant combien de jours les crèches ont-elles été fermées ?

Partie B – Étude algébrique

1. Déterminer, pour tout réel t de l'intervalle $[0; 40]$, l'expression de $f'(t)$.
2. Étudier le signe de $f'(t)$ pour t variant dans l'intervalle $[0; 40]$.
   En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. Au bout de combien de jours de suivi de la propagation le nombre de personnes touchées par la maladie est-il maximal ?
   Combien y a-t-il alors de personnes touchées ?



15 *(2015, Pondichéry).* On s'intéresse à la trajectoire d'un ballon de basket lancé par un joueur faisant face au panneau. Cette trajectoire est modélisée dans le repère ci-dessous.

Dans ce repère, l'axe des abscisses correspond à la droite passant par les pieds du joueur et la base du panneau, l'unité sur les deux axes est le mètre. On suppose que la position initiale du ballon se trouve au point J et que la position du panier se trouve au point P.

La trajectoire du ballon est assimilée à la courbe C représentant une fonction f.

Les coordonnées du ballon sont donc $(x; f(x))$.

1. Étude graphique

En exploitant la figure, répondre aux questions suivantes :

a. Quelle est la hauteur du ballon lorsque $x = 0{,}5$ m ?

b. Le ballon atteint-il la hauteur de 5,5 m ?

2. Étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 6]$ par $f(x) = -0{,}4x^2 + 2{,}2x + 2$.

a. Calculer $f'(x)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0; 6]$.

c. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon lors de ce lancer ?

3. Modification du lancer

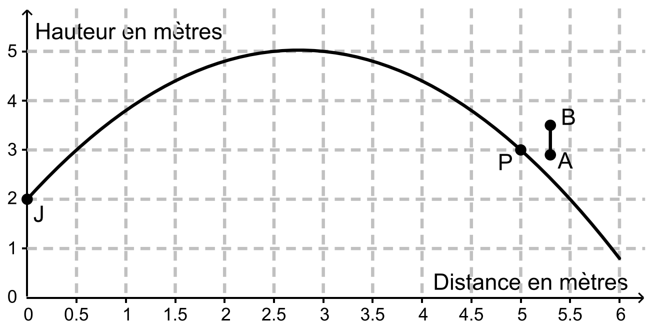
En réalité, le panneau, représenté par le segment $[AB]$ dans la figure ci-dessous, se trouve à une distance de 5,3 m du joueur. Le point A est à une hauteur de 2,9 m et le point B est à une hauteur de 3,5 m.

Le joueur décide de modifier son lancer pour tenter de faire rebondir le ballon sur le panneau. Il effectue alors deux lancers successifs.

Dans le premier lancer, la trajectoire du ballon est modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 6]$ par $g(x) = -0{,}2x^2 + 1{,}2x + 2$.

Dans le second lancer, la trajectoire du ballon est modélisée par la fonction h définie sur l'intervalle $[0; 6]$ par $h(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}8x + 2$.

Pour chacun de ces deux lancers, déterminer si le ballon rebondit ou non sur le panneau.



16 *(2014, Polynésie).* Un entrepreneur lance sur le marché de nouvelles coques haut de gamme pour les téléphones mobiles.

Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes représentant les recettes (en trait plein) et les coûts (en pointillés), en fonction du nombre de produits fabriqués exprimé en centaines d'unités.

On admet que la fabrication est comprise entre 0 et 700 unités.

Les recettes et les coûts sont exprimés en milliers d'euros.

Partie A – Lecture graphique

Répondre aux questions suivantes en vous aidant du graphique ci-dessous.

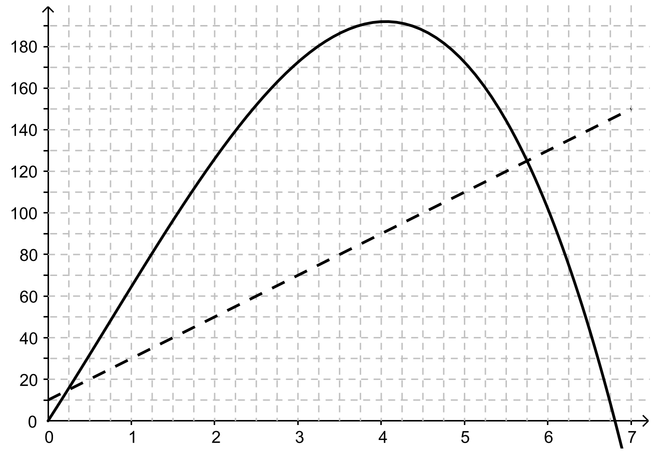
1. Combien faut-il fabriquer de produits pour avoir une recette égale à 140000 euros ?
2. Combien de produits doit-on fabriquer pour obtenir un bénéfice positif ou nul ?

Partie B – Étude du bénéfice

On modélise :

- les recettes par la fonction R définie sur $[0; 7]$ par $R(x) = -2x^3 + 4{,}5x^2 + 62x$;
- les coûts par la fonction C définie sur $[0; 7]$ par $C(x) = 20x + 10$.

1. Calculer la recette et le coût pour 300 produits fabriqués. En déduire le bénéfice correspondant.
2. On note B la fonction bénéfice. Donner l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $[0; 7]$.
3. Vérifier que $B'(x) = -6x^2 + 90x + 62$.
4. Étudier le signe de $B'(x)$. Donner le tableau de variations de B.
5. En déduire la valeur du bénéfice maximal ainsi que le nombre de produits à fabriquer pour l'obtenir.

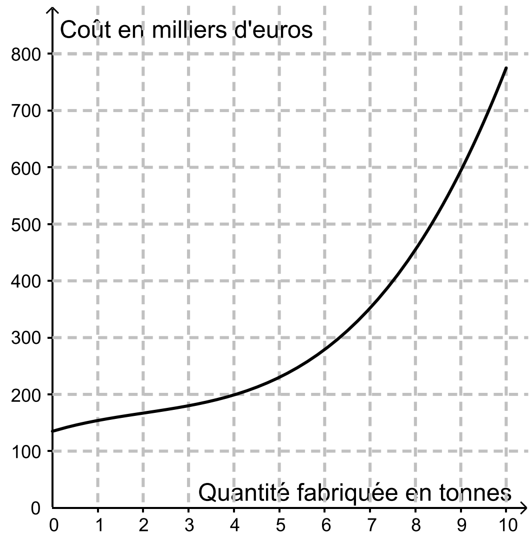


17 *(2013, Polynésie).* Une entreprise fabrique et commercialise un alliage métallique. Chaque mois, elle peut produire jusqu'à 10 tonnes de cet alliage et en vend toute la production.

Partie A – Étude du coût total et de la recette

Le coût total de production de x tonnes de l'alliage, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction C dont l'expression est $C(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 135$ où x appartient à l'intervalle $[0; 10]$.

La courbe Γ, représentant la fonction C dans un repère du plan, est donnée ci-dessous.



1. Donner par lecture graphique :

   a. le coût total d'une production de 4 tonnes ;

   b. la quantité correspondant à un coût total de production de 600 milliers d'euros.

2. Déterminer par le calcul :
   a. le coût total de production de 6 tonnes de l'alliage.
   b. le coût moyen de production d'une tonne lorsque l'entreprise produit 6 tonnes.
3. Après une étude de marché, le prix de vente de l'alliage produit a été fixé à 60 milliers d'euros la tonne.
   a. Calculer la recette pour la vente de 5 tonnes d'alliage.
   b. On note R la fonction qui modélise la recette, exprimée en milliers d'euros, pour x tonnes vendues. Donner une expression de $R(x)$ en fonction de x.
   c. Représenter graphiquement la fonction R sur l'intervalle $[0; 10]$, dans le repère ci-dessus.
   d. Pour quelles valeurs de x l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

Partie B – Étude algébrique du bénéfice

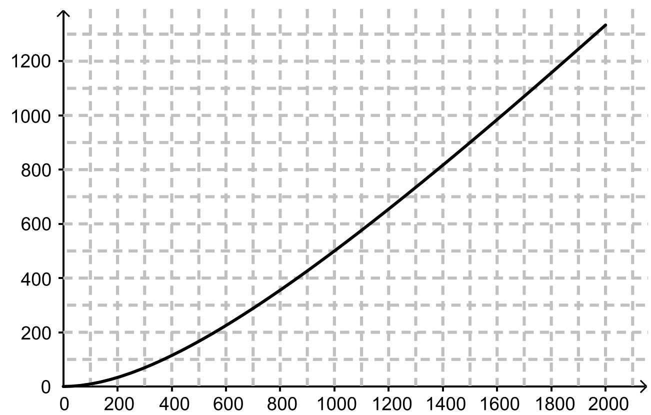
On note B la fonction qui modélise le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, sur l'intervalle $[0; 10]$.

1. Montrer que l'expression de $B(x)$, lorsque x appartient à l'intervalle $[0; 10]$ est
$$B(x) = x^3 + 6x^2 + 36x - 135.$$
2. Calculer $B'(x)$.
3. Étudier le signe de B' et en déduire les variations de B sur l'intervalle $[0; 10]$.
4. Déterminer la quantité d'alliage à produire pour réaliser un bénéfice maximal.

Étude de fonctions rationnelles

18 *(2014, Polynésie).* Pour une nouvelle mine de plomb, les experts d'une entreprise modélisent le chiffre d'affaires (en milliers d'euros) avec la fonction f définie sur $[0; 2000]$ par $f(x) = \frac{x^2}{x+1000}$ où x désigne la masse de plomb vendue, exprimée en tonnes.

La représentation graphique de cette fonction est tracée ci-dessous.



Partie A

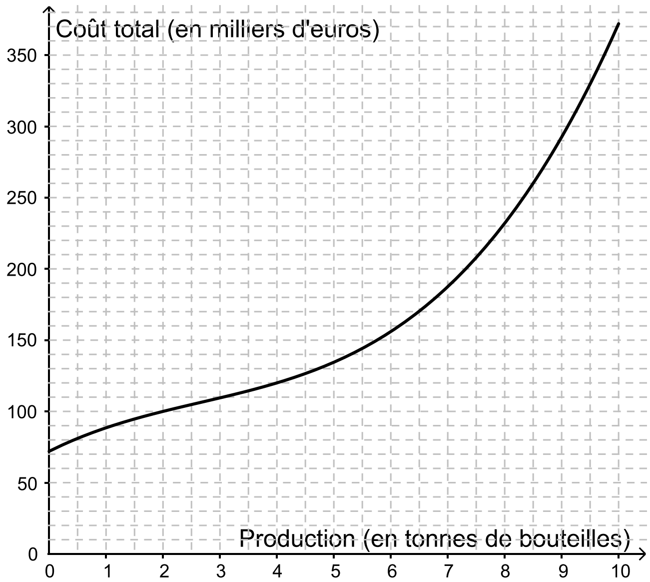
1. Montrer que $f'(x) = \frac{x^2+2000x}{(x+1000)^2}$.
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0; 2000]$; en déduire le tableau de variations de f.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 500$ sur $[0; 2000]$.
4. Que signifie ce résultat pour l'entreprise ?

Partie B

Les coûts d'extraction et de traitement sont donnés (en milliers d'euros) par la fonction linéaire : $g(x) = 0{,}6x$ où x désigne la masse de plomb vendue, exprimée en tonnes.

1. Tracer la droite d'équation $y = 0{,}6x$ sur le graphique.
2. Les géologues ont prévu d'extraire 1400 tonnes de plomb.
   Le chiffre d'affaires sera-t-il supérieur au coût ? Justifier la réponse.

19 *(2015, centres étrangers).* Une entreprise fabrique des bouteilles en verre. La production quotidienne, exprimée en tonnes, varie entre 0 et 10. Pour l'entreprise, le coût correspondant à la fabrication de x tonnes de bouteilles, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :
$$f(x) = 0{,}5x^3 - 4x^2 + 20x + 72.$$
On a représenté ci-dessous la fonction f dans un repère orthogonal du plan.



Partie A

1. Déterminer, par lecture graphique, le coût correspondant à la fabrication d'une tonne de bouteilles.
2. Déterminer, par lecture graphique, la production de bouteilles correspondant à un coût de fabrication de 130 milliers d'euros.

Partie B

On appelle coût moyen la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0; 10]$ par $C_M(x) = \frac{f(x)}{x}$.

1. Calculer la dérivée de la fonction C_M.
2. Montrer que pour tout $x \in]0; 10]$, on a
$$C'_M(x) = \frac{(x-6)(x^2+2x+12)}{x^2}.$$
3. Justifier que $C'_M(x)$ est du signe de $x - 6$ pour x variant dans l'intervalle $]0; 10]$ et en déduire le tableau des variations de la fonction C_M.
4. Déterminer la production de bouteilles correspondant à un coût moyen minimal.

Partie C

L'entreprise vend ses bouteilles de verre au prix de 40 milliers d'euros la tonne.

1. On note B la fonction bénéfice, exprimée en milliers d'euros. Montrer que l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $[0; 10]$ est
$$B(x) = -0{,}5x^3 + 4x^2 + 20x - 72.$$
2. Calculer le bénéfice associé à une production de 6,5 tonnes.
3. Que pensez-vous de l'affirmation « le bénéfice est maximal lorsque le coût moyen est minimal » ? Justifier la réponse.