Les fonctions en STMG – Résumé

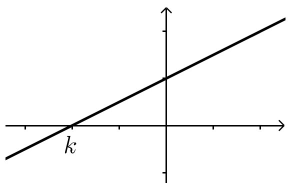
1. Fonctions affines

Une fonction affine est une fonction de la forme $f(x) = ax + b$. Sa courbe représentative est une droite.
Si $\boldsymbol{a} > 0$, la fonction est **croissante**. Si $\boldsymbol{a} < 0$, elle est **décroissante**.

Pour étudier le signe d'une fonction affine, on commence par résoudre l'équation $ax + b = 0$. Soit k la solution de cette équation. Ensuite le signe de $ax + b$ dépend de celui de a.

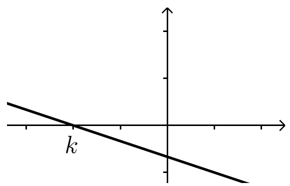
Si $a > 0$

x	$-\infty$ $\quad k \quad$ $+\infty$
signe de $ax+b$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$



Si $a < 0$

x	$-\infty$ $\quad k \quad$ $+\infty$
signe de $ax+b$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$



Exemple. Soit $f(x) = 4 - 5x$. On a

$$4 - 5x = 0 \Leftrightarrow 4 = 5x \Leftrightarrow \frac{4}{5} = x.$$

Ici $a = -5 < 0$, donc le tableau de signe de f est celui-ci-contre.

x	$-\infty$ $\quad \frac{4}{5} \quad$ $+\infty$
signe de $ax+b$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$

2. Trinômes du second degré

Un trinôme du second degré est une fonction de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Sa courbe représentative est une parabole.

Pour trouver le signe du trinôme, on commence par voir si l'équation $f(x) = 0$ a des solutions ; on dit que ce sont des racines du trinôme $f(x)$.
Pour cela, on calcule le discriminant $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ de l'équation.

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions : $\boxed{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$.

Le signe de $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ est celui de $\boldsymbol{a}$, sauf entre les racines, s'il y en a.

Exemple. Soit $f(x) = -x^2 + x - 1$. On a $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = -3 < 0$. Le trinôme n'a pas de racines, il est donc du signe de $a = -1$ pour tout nombre x, c'est-à-dire négatif.
Soit le trinôme $g(x) = x^2 + 2x - 3$. On a $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$. Le trinôme a deux racines qui sont $\frac{-2+\sqrt{16}}{2\times1} = 1$ et $\frac{-2-\sqrt{16}}{2\times1} = -3$. Ainsi $g(x)$ est du signe de $a = 1 > 0$, sauf entre les racines.

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
signe de $f(x)$	$-$

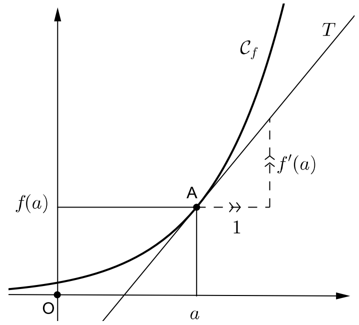
x	$-\infty$ $\quad -3 \quad$ $\quad 1 \quad$ $+\infty$
signe de $g(x)$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$ $\quad 0 \quad$ $+$

3. Variations et dérivées

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative C_f d'une fonction f au point d'abscisse a s'appelle le **nombre dérivé de $\boldsymbol{f}$ en a** et se note $f'(a)$.

Si $\boldsymbol{f'}$ est positive, alors $\boldsymbol{f}$ est croissante. Si $\boldsymbol{f'}$ est négative, alors $\boldsymbol{f}$ est décroissante.

Pour étudier une fonction, on commence par calculer $f'(x)$ puis on construit son tableau de signes. On en déduit alors les variations de f.



4. Dérivées à connaître

Fonction $\boldsymbol{f}$	**Fonction dérivée $\boldsymbol{f'}$**
$f(x) = k$, où k est un nombre	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$ où n est un entier	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

- si u et v sont deux fonctions, alors la dérivée de $u + v$ est $u' + v'$;
- si u est une fonction et k un nombre, alors la dérivée de $k \times u$ est $k \times u'$.
- si u et v sont deux fonctions, alors la dérivée de $\frac{u}{v}$ est $\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Exemple. La dérivée de $f(x) = 4x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ est

$$f'(x) = 4 \times 3x^2 - 4 \times 2x + 2 = 12x^2 - 8x + 2.$$

Le discriminant $\Delta = -32$ est négatif, donc $f'(x)$ est du signe de $a = 12 > 0$, il est positif sur $\mathbb{R}$. Ainsi la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.