Probabilités conditionnelles

Dans ce chapitre, on note E l'univers d'une expérience aléatoire, c'est-à-dire l'ensemble de ses issues, et P une (loi de) probabilité sur cet univers.

1. Probabilité conditionnelle

Exemple

Un sachet de 100 bonbons contient 40 bonbons acidulés, les autres bonbons sont à la guimauve ; 10 bonbons sont acidulés et au parfum orange et 18 des bonbons à la guimauve sont au parfum orange. Les bonbons qui ne sont pas au parfum orange sont à la fraise.
On choisit un bonbon au hasard dans ce sachet. On note :

- A l'événement « le bonbon est acidulé » ;
- G l'événement « le bonbon est à la guimauve » ;
- O l'événement « le bonbon est au parfum orange » ;
- F l'événement « le bonbon est au parfum fraise » ;

1. Le tableau ci-contre résume les données.

	A	G	Total
O	**10**	**18**	28
F	30	42	72
Total	**40**	60	100

2. On a $P(A) = \frac{4}{100} = 0{,}4$ et $P(O \cap A) = \frac{10}{100} = 0{,}1$
On choisit un bonbon acidulé. La probabilité qu'il soit à l'orange est $\frac{10}{40} = 0{,}25$.
On appelle cette probabilité « probabilité conditionnelle de O sachant A » et on la note $P_A(O)$. On remarque que $P_A(O) = \frac{P(O \cap A)}{P(A)}$.

Définition. *Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. La <u>probabilité conditionnelle de B sachant A</u> est le nombre noté $P_A(B)$ défini par $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. On lit « probabilité de B sachant A ».*

Exemple

$P_G(O) = \frac{18}{60} = 0{,}3$, $P_G(F) = \frac{42}{60} = 0{,}7$, $P_A(F) = \frac{30}{40} = 0{,}75$, $P_F(G) = \frac{42}{72} \approx 0{,}58$ etc.

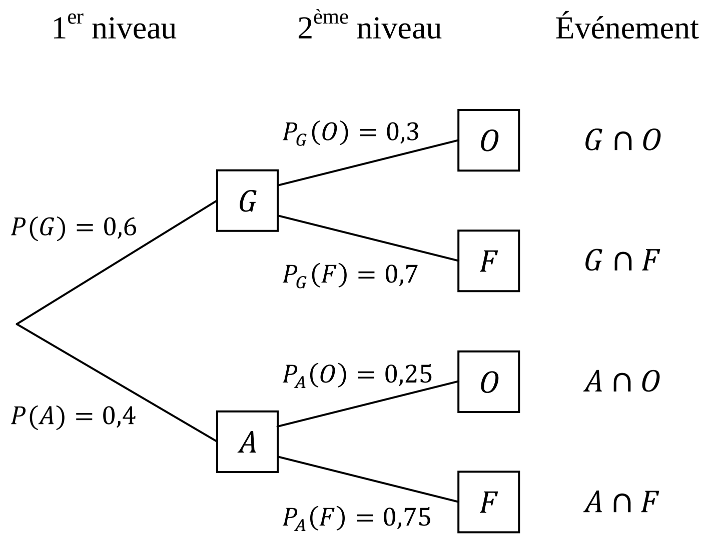
Théorème (probabilité de l'intersection). Soit A et B deux événements. Alors

- si $P(A) \neq 0$, on a $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$;
- si $P(B) \neq 0$, on a $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

Cette formule permet de calculer $P(A \cap B)$ connaissant l'une des probabilités conditionnelles $P_A(B)$ ou $P_B(A)$.

2. Arbres pondérés et probabilités totales

Il peut s'avérer utile de traduire une situation ou de modéliser une expérience aléatoire par un arbre. La construction de cet arbre est parfois plus pratique qu'un tableau. Reprenons l'exemple précédent.



Le premier niveau de l'arbre précise les deux types possibles (acidulé ou guimauve) du bonbon choisi au hasard dans le sachet. On indique sur les branches du premier niveau les probabilités $P(G)$ et $P(A)$.

Le deuxième niveau indique les parfums possibles sachant le type du bonbon. Ce deuxième niveau est composé de deux branches issues du nœud G et de deux branches issues du nœud A. On indique sur les branches de ce deuxième niveau les probabilités que le bonbon soit au parfum orange (événement O) ou au parfum fraise (événement F) sachant qu'il est à la guimauve ou acidulé. Ce sont les probabilités conditionnelles de l'événement F ou O sachant l'événement G ou A.

Chaque succession de branches est appelée chemin, il représente l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin. Cet arbre a quatre chemins correspondant aux événements $G \cap O$, $G \cap F$, $A \cap O$ et $A \cap F$.

Généralement les données dont on dispose ne permettent pas d'indiquer immédiatement les probabilités des branches ou des chemins. On a alors recourt aux règles suivantes qui découlent de la définition d'une probabilité conditionnelle et des propriétés des probabilités.

Règles des arbres pondérés

- **a.** La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités indiquées sur les branches du chemin.
- **b.** La somme des probabilités indiquées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- **c.** La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chacun de ces chemins.

Exemple

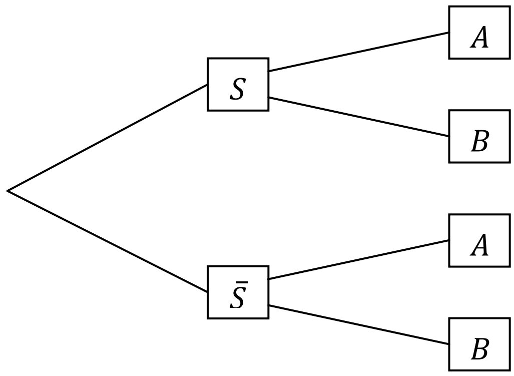
L'entreprise REPROD fabrique et commercialise deux modèles de photocopieurs : un modèle relativement bon marché (appelé « modèle ALPHA ») et un modèle plus perfectionné et un peu plus cher (appelé « BETA »).
Au début de l'année 2011, cette entreprise a réalisé une enquête auprès des personnes qui lui ont acheté un photocopieur en 2009. Le dépouillement des réponses a fait apparaître les résultats suivants :

- 14 % des clients ont fait appel au Service Après Vente durant l'année 2010.
- Parmi eux, 46 % avaient acheté un modèle BETA.
- Parmi ceux qui n'ont pas fait appel au SAV, 87 % avaient acheté un modèle BETA.

Pour un client pris au hasard, on note

- S l'évènement : « Le client a dû faire appel au SAV» et $\bar{S}$ son contraire.
- A l'évènement : « Le client a un modèle ALPHA » et B l'évènement : « Le client a un modèle BETA » (on a évidemment : $B = \bar{A}$).

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant en plaçant une probabilité sur chaque branche (aucune justification n'est attendue ici) :



2. Définir à l'aide d'une phrase l'évènement $S \cap B$. Calculer sa probabilité.
3. Montrer que : $P(B) = 0{,}8126$. En déduire $P(A)$.
4. Déterminer $P_B(S)$ et $P_A(S)$. On donnera ici des résultats arrondis à 0,01.
5. Lequel des deux modèles semble le plus fiable? Expliquer.

(Baccalauréat Nouvelle-Calédonie , novembre 2011)