Suites – Exercices

Révision

1 Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$.
1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer u_{100}.

2 Maxime attend d'avoir 18 ans pour pouvoir donner son sang. Il prévoit de participer à 5 dons par an (maximum autorisé).
On note u_n le nombre de dons qu'il aura effectué le jour de ses $18 + n$ ans.
1. Calculer u_0, u_1, u_2.
2. Quelle est la nature de la suite u_n ?
3. Exprimer u_n en fonction de n
4. Combien de dons aura effectués Maxime le jour de ses 30 ans ?

3 La population d'une ville, qui était de 15 000 habitants en 2001, baisse depuis cette date de 600 habitants par an.
1. Combien y avait-il d'habitants en 2002 ? 2003 ?
2. On note p_0 la population en 2001 et p_n la population n années plus tard, c'est-à-dire en $2001 + n$.
   Montrer que la suite est arithmétique ; préciser sa raison et son terme initial.
3. Déterminer à partir de quelle année la population de cette ville sera inférieure à 10 000 habitants.

4 Un coureur amateur décide de s'entraîner pour un marathon (42,195 km). Au premier entraînement il court 14 km. À chaque nouvel entraînement, il augmente de 4 km la distance courue. On note u_n la distance parcourue au n-ième entraînement.
1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Quelle distance parcourra le coureur au sixième entraînement ?
4. On considère l'algorithme ci-dessous.

Variables	U est un réel N est un entier
Initialisation	U prend la valeur 10 N prend la valeur 1

Traitement	Tant que $U < 42{,}195$
	  U prend la valeur $U + 4$
	  N prend la valeur $N + 1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher N

   a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous avec autant de colonnes que nécessaire jusqu'à ce que l'algorithme s'arrête.

$U < 42{,}195$?		oui	…
U	10	14	…
N	1	2	…

   b. Qu'affiche l'algorithme ? À quoi correspond la valeur trouvée ?

5 Soit (u_n) la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$.
1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer u_8.

6 Vincent a déposé le 1er janvier 2016 une somme de 1000 € à la banque. Les intérêts lui rapportent 3 % par an.
1. Calculer la somme dont disposera Vincent au 1er janvier 2020.
2. On note u_n la somme dont dispose Vincent le 1er janvier de l'année $2016 + n$.
   a. Que vaut u_0 ? u_4 ?
   b. Quelle relation existe-t-il entre u_{n+1} et u_n ?
3. On considère l'algorithme ci-dessous.

Variables	U est un réel N est un entier
Initialisation	U prend la valeur 1000
Traitement	Pour N allant de 1 à 8 U prend la valeur $U \times 1{,}03$ Fin Tant que
Sortie	Afficher U

   a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous avec autant de colonnes que nécessaire jusqu'à ce que l'algorithme s'arrête.

N		1	…
U	1000	1030	…

   b. Qu'affiche l'algorithme ? À quoi correspond la valeur trouvée ?

7 Une association caritative a constaté que, chaque année, 20 % des donateurs de l'année précédente ne renouvelaient pas leur don mais que, chaque année, 300 nouveaux donateurs effectuaient un don.
On étudie l'évolution du nombre de donateurs au fil des années. On note u_n le nombre de donateurs lors de la $n^{\text{ième}}$ année.
On suppose que la première année il y a 1000 donateurs, donc $u_1 = 1000$.

```
1000
                1000
Rép*0.8+300
                1100
                1180
                1244
              1295.2
```

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a
   $$u_{n+1} = 0{,}8u_n + 300.$$
3. Calculer u_{10} en procédant comme il est suggéré sur la copie d'écran ci-contre.

Sujets de baccalauréat

8 *(2012, Antilles-Guyane).* Le but de cet exercice est de comparer l'évolution de la population de deux quartiers d'une même ville : le quartier Uranus et le quartier Saturne.
En 2010, Uranus compte 2000 habitants et Saturne en compte 2700. On fait l'hypothèse que, chaque année, la population d'Uranus augmente de 250 habitants et celle de Saturne augmente de 4 %. On note u_n sa population en l'an $2010 + n$. On considère de même s_n pour Saturne.

	A	*B*	*C*
1	n	u_n	s_n
2	0	2000	2700
3	1	2250	2808
4	2	2500	2920
5	3	2750	3037
6	4	3000	3159
7	5		
8	6		
9	7		
10	8		

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.
2. **a.** Démontrer que la suite (s_n) est géométrique de raison 1,04.
   b. Exprimer s_n en fonction de n.

3. Afin de prévoir l'évolution de la population de ces deux quartiers, on a réalisé en annexe une feuille de calcul. (les valeurs ont été arrondies à l'unité).
   a. Indiquer la formule saisie en C3 qui, recopiée vers le bas, permet d'obtenir les termes consécutifs de la suite (s_n) dans la colonne C.
   b. Compléter les colonnes B et C.
   c. En quelle année la population d'Uranus dépassera-t-elle pour la première fois celle de Saturne ?

9 *(2014, Polynésie).* Pour chaque question posée, quatre réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est correcte.

1. La valeur d'une action cotée en Bourse a baissé de 37,5 %. Sa valeur a été multipliée par
   a. 0,375 **b.** 1,375 **c.** 1,625 **d.** 0,625
2. Le prix d'une denrée alimentaire a augmenté le premier mois de 2 % puis a baissé le second mois de 10 %.
   Le taux d'évolution moyen mensuel est (à 0,01 % près).
   a. −4 % **b.** 4,2 % **c.** − 4,19 % **d.** 3,83 %
3. Le prix d'un article est de 87 euros. Ce prix augmente de 2 % chaque année.
   Le prix dépassera 106 euros à partir de la
   a. 7ème année **b.** 9ème année
   c. 10ème année **d.** 14ème année
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables
i, n, u
Entrée
Saisir n
Traitement
u prend la valeur 5
Pour i allant de 1 à n
u prend la valeur $0{,}94 \times u$
Fin Pour
Sortie
Afficher u

   Si l'on choisit $n = 8$, l'algorithme affichera (à 0,01 près)
   a. 3,24 **b.** 3,05 **c.** 0,61 **d.** 0,94×5

10 *(2014, centres étrangers).* Les deux parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

La feuille de calcul ci-dessous traduit l'évolution du prix moyen des maisons dans une ville donnée entre 2006 et 2011. Elle indique également le taux d'évolution annuel (arrondi à 0,1 %) de ce prix, et son indice, avec 100 pour indice de base en 2006.

	A	B	C	D	E
1	Année	2006	2007	2008	2009
2	Valeur (€)	200 000	205 000	214 840	
3	Taux d'évolution annuel en %		+ 2,5 %	+ 4,8 %	+ 1,3 %
4	Indice	100	102,5	107,4	108,8

F	G	H	I
2010	2011	2012	2013
231 562	232 458	234 813	239 744
+ 6,4 %		+ 1 %	+ 2,1 %
115,8	116,2	117,4	119,9

Ainsi, entre les années 2006 et 2007, le prix moyen des maisons de la ville a augmenté de 2,5 %.

1. **a.** Déterminer le prix moyen des maisons en 2009, en arrondissant à l'euro.
   b. Déterminer le taux d'évolution du prix moyen des maisons entre 2010 et 2011 arrondi à 0,1 %.
2. Parmi les propositions ci-dessous indiquer les deux formules que l'on peut saisir dans la cellule C4 pour obtenir, après recopie vers la droite, les valeurs de la plage de cellules C4:I4.
   a. =C2/B2*$B$4 **b.** =C2/200000*100
   c. =$C2/$B$2*B4 **d.** =C2/$B$2*$B$4

Partie B

Madame Économe décide de faite fructifier son capital à partir du 1er janvier 2015 sur un compte à intérêts composés au taux annuel de 5 %. Elle hésite entre deux options.

1. Première option : effectuer un versement unique de 10000 €.
   Soit n un entier naturel. On note u_n le capital en euros acquis le 1er janvier de l'année $(2015 + n)$.
   Ainsi $u_0 = 10000$.
   a. Calculer u_1.
   b. Préciser la nature de la suite (u_n) et déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
   c. En déduire le capital acquis au 1er janvier 2025, arrondi à l'euro.
2. Deuxième option : effectuer au 1er janvier de chaque année un versement de 1000 € à partir de 2015.
   On note C_n le capital, en euros, au 1er janvier de l'année $(2015 + n)$, une fois le versement de 1000 € effectué.
   Ainsi $C_0 = 1000$.
   a. Expliquer pourquoi on a, pour tout entier naturel n : $C_{n+1} = 1{,}05C_n + 1000$.
   b. On considère l'algorithme suivant :

Variables	k et C sont deux nombres entiers
Initialisation	k prend la valeur 0 C prend la valeur 1000

Traitement	Tant que $C < 10000$
	  C prend la valeur $1{,}05C + 1000$
	  k prend la valeur $k + 1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher k

   L'algorithme affiche le résultat $k = 8$.
   Donner une interprétation de ce résultat pour le capital de Madame Économe.

11 *(2014, Pondichéry).* Deux coureurs cyclistes, Ugo et Vivien, ont programmé un entraînement hebdomadaire afin de se préparer à une course qui aura lieu dans quelques mois. Leur objectif est de parcourir chacun une distance totale de 1500 km pendant leur période d'entraînement de 20 semaines.

Ugo commence son entraînement en parcourant 40 km la première semaine et prévoit d'augmenter cette distance de 5 km par semaine.

Vivien commence son entraînement en parcourant 30 km la première semaine et prévoit d'augmenter cette distance de 10 % par semaine.

On note u_n la distance, en kilomètres, parcourue par Ugo la n-ième semaine et v_n la distance, en kilomètres, parcourue par Vivien la n-ième semaine.

On a ainsi $u_1 = 40$ et $v_1 = 30$.

Dans cet exercice, on étudie les suites (u_n) et (v_n).

Partie A – L'entraînement d'Ugo

1. Calculer les distances parcourues par Ugo au cours des deuxième et troisième semaines d'entraînement.
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.

3. Compléter les lignes (1) et (2) et l'algorithme ci-dessous de façon à ce qu'il affiche en sortie la distance parcourue par Ugo lors de la n-ième semaine d'entraînement.

Variables :	u est un réel i et n sont deux nombres entiers
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	u prend la valeur . . . . (1)
Traitement :	Pour i allant de 1 à n u prend la valeur . . . . (2) Fin Pour
Sortie :	Afficher u

4. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n = 35 + 5n$.

Partie B – L'entraînement de Vivien

1. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier la réponse.
2. Montrer que, pour tout $n > 1$, $v_n = 30 \times 1{,}1^{n-1}$.
3. Calculer v_8. On arrondira le résultat au dixième.

Partie C – Comparaison des deux entraînements

1. Vivien est persuadé qu'il y aura une semaine où il parcourra une distance supérieure à celle parcourue par Ugo. Vivien a-t-il raison ?
   On pourra utiliser les parties A et B pour justifier la réponse.
2. À la fin de la $17^{\text{ème}}$ semaine, les deux cyclistes se blessent. Ils décident alors de réduire leur entraînement. Ils ne feront plus que 80 km chacun par semaine à partir de la $18^{\text{ème}}$ semaine.
   Leur objectif sera-t-il atteint ? Justifier.

12 *(2014, Nouvelle-Calédonie, extrait).* On suppose que le prix moyen d'un paquet de cigarettes augmente de 6 % par an à partir du 1^{er} janvier 2000. On note u_n le prix moyen d'un paquet de cigarettes pour l'année $2000 + n$.
On a donc $u_0 = 3{,}20$.

1. **a.** Calculer u_1 puis u_2. On arrondira à 10^{-3} près.
   b. Déterminer et justifier la nature de la suite (u_n). Préciser sa raison.
   c. Exprimer le terme général u_n en fonction de n.
   d. Selon ce modèle d'évolution, le prix moyen d'un paquet de cigarettes dépasse-t-il 5 € le 1^{er} janvier 2005 ? Justifier.
2. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	u et S sont du type réels n est du type nombre entier
Entrée :	Saisir n

Début algorithme :	u prend la valeur 3,2
	S prend la valeur 3,2
	Pour n allant de 1 à 4
	  Début Pour
	  u prend la valeur $u \times 1{,}06$
	  S prend la valeur $S + u$
	Fin Pour

Fin algorithme	
Sortie :	Afficher S

   a. Quelle est la valeur affichée par cet algorithme ? On arrondira le résultat à 10^{-2} près. On pourra s'aider du tableau ci-dessous et à recopier et à compléter avec autant de colonne que nécessaire.

n		1	2		
u	3,2	3,39			
S	3,2	6,59			

   b. L'algorithme affiche une valeur lorsqu'il s'achève. Comment interpréter cette valeur par rapport à la suite (u_n) ?
3. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
   Paul a arrêté de fumer le 1^{er} janvier 2011. Du 1^{er} janvier 2000 au 31 décembre 2010, il fumait 90 paquets de cigarettes par an. Quelle somme d'argent aurait-il pu économiser s'il n'avait pas fumé durant ces années ? On arrondira le résultat au centime d'euro près.

13 *(2014, métropole).* On s'intéresse à la population d'une ville et on étudie plusieurs modèles d'évolution de cette population.
En 2013, la population de la ville était de 15000 habitants.

Partie A – Étude de deux modèles d'évolution

1. **Hypothèse 1.** En analysant l'évolution récente, on fait d'abord l'hypothèse que le nombre d'habitants augmente de 1000 habitants par an.
   Pour tout entier n, on note u_n le nombre d'habitants pour l'année $2013 + n$. On a ainsi $u_0 = 15000$.
   a. Que représente u_1 ? Calculer u_1 et u_2.
   b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.
   c. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
   d. Selon ce modèle, quelle devrait être la population en 2018 ?
   e. Selon ce modèle, en quelle année la population devrait-elle atteindre 30000 habitants ?

2. **Hypothèse 2.** On fait à présent l'hypothèse que le nombre d'habitants augmente de 4,7 % par an.
   Le nombre d'habitants pour l'année $(2013 + n)$ est modélisé par le terme v_n d'une suite géométrique. Ainsi $v_0 = 15000$.
   a. Calculer les valeurs des termes v_1 et v_2 arrondies à l'unité.
   b. Déterminer la raison de la suite (v_n).
   c. Exprimer, pour tout entier n, v_n en fonction de n.
   d. Calculer, selon ce modèle, le nombre d'habitants de la ville en 2028.
   e. En examinant l'évolution de villes comparables à celle que l'on étudie ici, des experts ont estimé que sa population allait augmenter de 50 % en 15 ans. Le résultat trouvé à la question précédente est-il en accord avec les prévisions des experts ? Justifier.

Partie B – Analyse des résultats sur tableur
On utilise un tableur pour comparer l'évolution de la population suivant les deux modèles. Les cellules sont au format « nombre à zéro décimale ».

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
2	Rang	0	1	2	3	4	5	
3	Population selon hypothèse 1	15000						
4	Population selon hypothèse 2	15000						

1. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule C3, pour obtenir, par recopie vers la droite, les termes successifs de la suite (u_n) pour n variant de 1 à 6 ?
2. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule C4, pour obtenir, par recopie vers la droite, les termes successifs de la suite (v_n) pour n variant de 1 à 6 ?