Les suites en STMG – Résumé

1. Généralités

Une suite est une liste de nombres numérotées par des indices qui commencent souvent à 0 ou 1.

Exemple 1. La suite des années bissextiles à partir de 2010 est

$$u_0 = 2012,\ u_1 = 2016,\ u_2 = 2020,\ \text{etc.}$$

On dit que 2012 est le premier terme de la suite (et le terme de rang 0), 2016 le deuxième terme (et celui de rang 1) etc.

Exemple 2. Le prix des péages autoroutiers augmente de 2 % par an. En 2010, un certain trajet coûtait 10 €. On note u_n le prix en $2010 + n$. On a donc $u_0 = 10$, puis $u_1 = 1{,}02 \times 10 = 10{,}2$ etc.

2. Suites arithmétiques

Une suite arithmétique est une suite dans laquelle chaque terme se déduit du précédent en **ajoutant** toujours un même nombre, appelé raison de la suite et noté r. On a donc l'égalité $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$. On dit qu'on a exprimé u_{n+1} en fonction de u_n.
Si $\boldsymbol{r > 0}$, la suite est **croissante**, si $\boldsymbol{r < 0}$, elle est **décroissante**.

Exemple 1 (suite). La suite des années bissextiles à partir de 2010 est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2012$ et de raison $r = 4$. Elle vérifie l'égalité $u_{n+1} = u_n + 4$.

Le problème qui se pose est par exemple de calculer u_{50}, car il faut calculer tous les termes précédents. Il existe une formule qui permet d'éviter cela :

$$\boxed{u_n = u_0 + n \times r} \text{ ou } u_n = u_1 + (n-1)r$$

On dit qu'on a exprimé u_n en fonction de n.

Exemple 1 (suite). On a $u_n = u_0 + n \times r = 2010 + 4n$. Par exemple la 50ème année bissextile après 2010 est $u_{50} = 2010 + 4 \times 50 = 2210$.

3. Suites géométriques

Une suite géométrique est une suite dans laquelle chaque terme se déduit du précédent en **multipliant** toujours par un même nombre, appelé raison de la suite et noté q. On a donc l'égalité $\boxed{u_{n+1} = q \times u_n}$.
Si $\boldsymbol{q > 1}$, la suite est **croissante**. Si $\boldsymbol{0 < q < 1}$, la suite est **décroissante**.

Exemple 2 (suite). La suite des prix des péages est géométrique puisque chaque année le tarif augmente de 2 %, c'est-à-dire qu'il est multiplié par 1,02. On a l'égalité $u_{n+1} = 1{,}02 \times u_n$.

On peut se demander quel sera le prix du péage en 2025, c'est-à-dire que vaut u_{15} ? Pour répondre à cette question sans avoir à calculer tous les tarifs des années passées, il existe une formule :

$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n} \text{ ou } u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

Exemple 2 (suite). On a donc $u_n = 10 \times 1{,}02^n$ et donc le prix du péage en 2025 sera $u_{15} = 10 \times 1{,}02^{15} \approx 13{,}46$ €.

4. Algorithmes

En STMG il faut connaître deux algorithmes. Voyons cela sur des exemples très simples.

Variables	U est un réel N est un entier
Initialisation	U prend la valeur 2012
Traitement	Pour N allant de 1 à 3 U prend la valeur $U + 4$ Fin Tant que
Sortie	Afficher U

● Calcul d'un terme de la suite
Exemple 1 (suite). L'algorithme ci-contre calcule u_3. Il suffit de faire un tableau permettant de suivre les valeurs des variables pour s'en convaincre.

N		1	2	3
U	2012	2016	2020	2024
	initialisation			

À la sortie l'algorithme affiche U, c'est-à-dire 2024.

● Recherche d'un seuil
Exemple 2 (suite). Supposons que l'on veuille savoir en quelle année le tarif du péage dépassera 11 €.
Il faut donc chercher le plus entier n pour lequel on a $u_n \geq 11$. Suivons l'état des variables grâce à un tableau (arrondies à 10^{-2} près).

Variables	U est un réel N est un entier
Initialisation	U prend la valeur 10 N prend la valeur 0
Traitement	Tant que $U < 11$ U prend la valeur $U \times 1{,}02$ N prend la valeur $N + 1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher N

$U < 11$?		oui	oui	oui	oui	oui	non
U	10	10,2	10,4	10,61	10,82	11,04	
N	0	1	2	3	4	5	
	initialisation						

Finalement l'algorithme affiche N, c'est-à-dire 5. Cela signifie que $u_5 > 11$ et donc que le tarif a dépassé 11 € à partir de $2010 + 5 = 2015$.