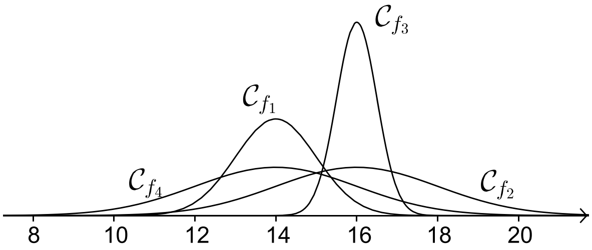
Loi normale et échantillonnage – Exercices

Loi normale

1 On a représenté les densités f_1, f_2, f_3, f_4 de variables aléatoire suivant des lois normales.



Associer à chaque densité ses paramètres

a. $\mu = 14$ et $\sigma = 1$ **b.** $\mu = 16$ et $\sigma = 0{,}5$
c. $\mu = 16$ et $\sigma = 2$ **d.** $\mu = 14$ et $\sigma = 2$

2 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(10; 9)$. Calculer

a. $P(8 < X \leq 11)$ **b.** $P(X \geq 10)$
c. $P(0 \leq X \leq 20)$ **d.** $P(X \leq 13)$

3 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(1; 0{,}04)$. Calculer

a. $P(X \geq 0{,}5)$ **b.** $P(1 \leq X \leq 2)$
c. $P(X < 2)$ **d.** $P(X > 1{,}3)$

4 La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 12 et d'écart-type 10. Calculer

a. $P(-2 \leq X \leq 20)$ **b.** $P(X \geq 10)$
c. $P(X < 18)$ **d.** $P(X < 9)$

5 Le délai de livraison d'une pièce, en jours, suit la loi normale $\mathcal{N}(20; 25)$. Quelle est la probabilité pour le délai de livraison soit

a. compris entre 18 et 23 jours ?
b. supérieur à 30 jours ?
c. inférieur à 15 jours ?
d. inférieur à 25 jours ?

6 Une étude effectuée par un chercheur a montré que l'âge au cours duquel apparaissent les premiers mots de vocabulaire chez les enfants suit la loi normale $\mathcal{N}(11{,}5; 3{,}2)$.

1. Déterminer le taux d'enfants n'ayant pas encore prononcé leurs premiers mots de vocabulaire au bout de 13 mois.
2. Déterminer à quel âge 25 % des enfants n'ont pas encore prononcé leurs premiers mots.

7 La quantité d'eau contenue dans une bouteille d'une certaine marque, exprimé en litres, suit la loi normale d'espérance 1 et d'écart-type 0,02. On choisit au hasard une bouteille de cette marque.

1. Quelle est la probabilité que cette bouteille contienne exactement un litre ?
2. Sans calculatrice, préciser la probabilité que cette bouteille contienne entre 0,96 et 1,04 L, puis entre 0,96 et 1 L.

8 À jeun, la glycémie, taux de sucre dans le sang exprimé en grammes par litre, suit la loi normale de paramètres $\mu = 1{,}03$ et $\sigma = 0{,}115$.

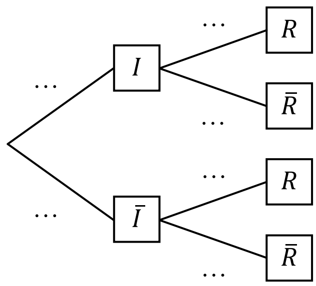
1. Préciser la probabilité d'avoir un taux de glycémie normal, c'est-à-dire compris entre 0,8 et 1,26 g.L^{-1}.
2. L'hyperglycémie correspond à une glycémie supérieure à 1,26 g.L^{-1}. Quelle est la probabilité d'en souffrir ?

9 Les scores en saut en hauteur X d'un groupe de 600 filles définissent une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(115; 100)$. Les scores Y d'un groupe de 800 garçons définissent une variable aléatoire suivant un loi normale $\mathcal{N}(130; 225)$.

1. Estimer le nombre de filles dont le score est supérieur à la moyenne des garçons.
2. Estimer le nombre de garçons dont le score est inférieur à la moyenne des filles.

10 *(2015, Antilles-Guyane).*

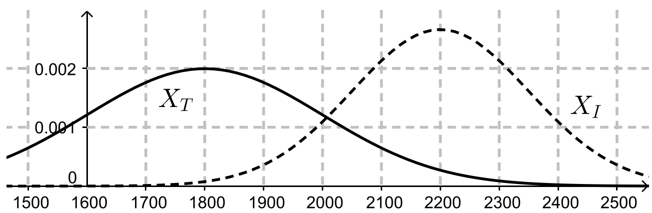
Partie A – Une entreprise de 2000 salariés compte 1200 techniciens et 800 ingénieurs.
Parmi les techniciens, 25 % déjeunent dans le restaurant de l'entreprise.
Parmi les ingénieurs, 20 % déjeunent dans ce même restaurant.



On interroge un salarié au hasard.
On note I l'évènement « le salarié interrogé est ingénieur » et R l'évènement « le salarié interrogé déjeune dans le restaurant de l'entreprise ».

1. Compléter l'arbre de probabilités ci-dessus.
2. Montrer que $p(R) = 0{,}23$.
3. Un salarié sort du restaurant de l'entreprise après y avoir déjeuné. Calculer la probabilité, arrondie au millième, pour qu'il soit ingénieur.

Partie B – On rappelle que cette entreprise est composée de 1200 techniciens et de 800 ingénieurs.
On modélise le salaire mensuel, exprimé en euros, d'un technicien de l'entreprise par une variable aléatoire X_T suivant une loi normale d'espérance m_T et d'écart type 200.
On modélise le salaire mensuel, exprimé en euros, d'un ingénieur de l'entreprise par une variable aléatoire X_I suivant une loi normale d'espérance m_I et d'écart type 150.
On donne ci-dessous la représentation graphique des fonctions de densité des variables X_T et X_I.



1. Déterminer graphiquement m_T et m_I.
2. Donner une valeur arrondie au centième de
$$p(X_T \leq 1600).$$
3. En déduire une estimation du nombre de techniciens dont le salaire mensuel est inférieur ou égal à 1600 € par mois.

Partie C – Une restructuration de l'entreprise a permis de promouvoir 250 techniciens au statut d'ingénieur. Les deux tableaux suivants rendent compte de cette évolution.

Avant restructuration	techniciens	ingénieurs
Effectif	1200	800
Salaire mensuel moyen	1800	2200

Avant restructuration	techniciens	ingénieurs
Effectif	950	1050
Salaire mensuel moyen	1764	2156

1. a. Calculer le taux d'évolution, exprimé en pourcentage, du salaire mensuel moyen des techniciens.
   b. Calculer le taux d'évolution, exprimé en pourcentage, du salaire mensuel moyen des ingénieurs.
2. a. Calculer la masse salariale (c'est-à-dire le montant total des salaires de tous les employés) avant et après la restructuration.
   b. Comment expliquer que la masse salariale a augmenté alors que le salaire mensuel moyen de chaque catégorie a diminué ?

Intervalles de fluctuation et prise de décision

11 On donne la proportion p d'un caractère dans une population et la taille n d'un échantillon. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % dans chacun des cas suivants.

a. $n = 100$ et $p = 0{,}44$

b. $n = 10000$ et $p = 0{,}36$

12 Il y a 23 % d'élèves boursiers dans les établissements d'enseignement secondaire en France. Déterminer un intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence des boursiers dans les lycées de 1200 élèves. Arrondir à 10^{-3}.

13 22 % des français sont d'accord pour supprimer les panneaux indiquant la présence de radars sur les routes. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de confiance 95 % de la proportion de personnes désirant supprimer les panneaux dans un échantillon de 2000 personnes.

14 *(2014, Pondichéry).*

Partie A – Un sondage a été effectué auprès de vacanciers sur leurs pratiques sportives pendant leurs congés.
Ce sondage révèle que 45 % des vacanciers fréquentent une salle de sport pendant leurs congés et parmi ceux-ci, 60 % pratiquent la natation.
Parmi les vacanciers qui ne fréquentent pas une salle de sport, 70 % pratiquent la natation.
On choisit un vacancier au hasard. On considère les évènements suivants :

- S : « le vacancier choisi fréquente une salle de sport » ;
- N : « le vacancier choisi pratique la natation ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. a. Définir par une phrase l'évènement $S \cap N$.
   b. Calculer la probabilité de l'évènement $S \cap N$.
3. Montrer que $P(N) = 0{,}655$.
4. Calculer $P_N(S)$, la probabilité de l'évènement S sachant que l'évènement N est réalisé.
   On arrondira le résultat à 10^{-4} près.
5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre vacanciers pris au hasard. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de ces vacanciers pratiquant la natation pendant leurs congés. Le nombre de vacanciers étant suffisamment grand, on considère que X suit une loi binomiale.
   a. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.
   b. Calculer la probabilité que deux vacanciers exactement pratiquent la natation pendant leurs congés.
   On arrondira le résultat à 10^{-4} près.

Partie B – En France, en 2011, 22 % des sportifs licenciés avaient une licence de football. Déterminer un intervalle de fluctuation à au moins 95 % de la fréquence des licenciés de football dans un échantillon de 400 sportifs licenciés choisis au hasard parmi les sportifs licenciés en 2011.

15 Une entreprise fabrique des composants électroniques en grande quantité. Une étude interne affirme que la probabilité qu'un composant électronique choisi au hasard dans cette production soit défectueux est égale à 2 %.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de composants électroniques défectueux sur des échantillons de taille 1000.
2. Un client a acheté 1000 pièces parmi lesquelles 23 étaient défectueuses. Peut-il remettre en cause l'enquête interne ?
3. Même question pour l'achat de $10\,000$ pièces parmi lesquelles 230 étaient défectueuses.

16 En 1976, dans un comté du Texas, Rodrigo Partida était condamné à huit ans de prison. Il attaqua ce jugement au motif que la désignation des jurés de ce comté était discriminante à l'écart des américains d'origine mexicaine. En effet, 79 % de la population de ce comté est d'origine mexicaine, et sur les 870 personnes convoquées pour être jurés lors d'une certain période de référence, il n'y eut que 339 personnes d'origine mexicaine. Peut-on dire que la constitution des jurys est faite de façon aléatoire ?

17 *(2014, Amérique du Nord, ES).* Un investisseur souhaite acheter un appartement dans l'objectif de le louer. Pour cela, il s'intéresse à la rentabilité locative de cet appartement.
Les trois parties peuvent être traitées indépendamment. Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-4}.

Partie A – On considère deux types d'appartement :

- les appartements d'une ou deux pièces notés respectivement T1 et T2 ;
- les appartements de plus de deux pièces.

Une étude des dossiers d'appartements loués dans un secteur a montré que :

- 35 % des appartements loués sont de type T1 ou T2 ;
- 45 % des appartements loués de type T1 ou T2 sont rentables ;
- 30 % des appartements loués, qui ne sont ni de type T1 ni de type T2, sont rentables.

On choisit un dossier au hasard et on considère les évènements suivants :

- T : « l'appartement est de type T1 ou T2 » ;
- R : « l'appartement loué est rentable » ;

1. Traduire cette situation par un arbre pondéré.
2. Montrer que la probabilité qu'un appartement loué soit rentable est égale à 0,3525.
3. Calculer la probabilité que l'appartement soit de type T1 ou T2, sachant qu'il est rentable.

Partie B – On considère X la variable aléatoire égale au nombre d'appartements rentables dans un échantillon aléatoire de 100 appartements loués. On admet que toutes les conditions sont réunies pour assimiler X à une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 35$ et d'écart-type $\sigma = 5$. À l'aide de la calculatrice :

1. Calculer $P(25 \leq X \leq 35)$.
2. Calculer la probabilité qu'au moins 45 appartements parmi les 100 appartements loués soient rentables.

Partie C – L'investisseur se rend dans une agence immobilière pour acheter un appartement et le louer. Le responsable de cette agence lui affirme que 60 % des appartements sont rentables. Pour vérifier son affirmation, on a prélevé au hasard 280 dossiers d'appartements loués. Parmi ceux-ci, 120 sont rentables.

1. Déterminer la fréquence observée dans cet échantillon.
2. Peut-on valider l'affirmation du responsable de cette agence ? Justifier cette réponse. On pourra s'aider du calcul d'un intervalle de fluctuation au seuil de 95%.

Intervalles de confiance et estimation

18 On considère un échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard dans un parc de véhicules neufs d'une entreprise. Ce parc contient suffisamment de véhicule pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise. On constate qu'au bout de 6 mois de mise en circulation, 89 véhicules de cet échantillon n'ont pas eu de sinistre.

1. Déterminer un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95.
2. On considère l'affirmation « la proportion p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question précédente ». Cette affirmation est-elle vraie ?

19 Une semaine avant une élection un sondage est effectué sur 1024 personnes choisis au hasard parmi les 42821 inscrites sur les listes ; 532 déclarent voter pour le candidat A. Le candidat A a-t-il raison de penser qu'il va être élu ?

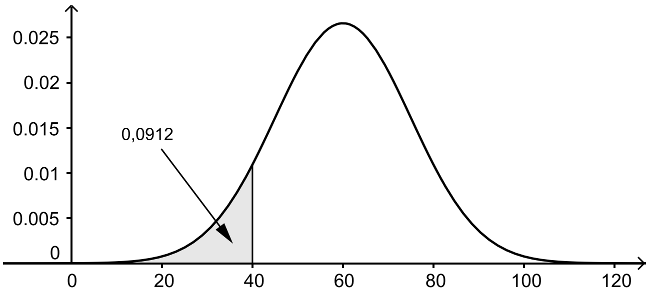
20 En lançant 200 fois un dé, on obtient 28 fois le numéro 1. Donner un intervalle de confiance pour la proportion du nombre de 1, au niveau de confiance de 95 %.

21 *(2014, Liban, ES). QCM avec une seule réponse exacte.*
Un fumeur est dit fumeur régulier s'il fume au moins une cigarette par jour.
En 2010, en France, la proportion notée p de fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, était de 0,236. On a donc $p = 0{,}236$.

1. La probabilité que, sur un groupe de 10 jeunes âgés de 15 à 19 ans choisis au hasard et de manière indépendante, aucun ne soit fumeur régulier est, à 10^{-3} près :
   a. $0{,}136$ **b.** 0 **c.** $0{,}068$ **d.** $0{,}764$
2. Un intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 de la fréquence de fumeurs réguliers dans un échantillon de 500 jeunes âgés de 15 à 19 ans est : *(les bornes de chaque intervalle sont données à 10^{-3} près)*
   a. $[0{,}198; 0{,}274]$ **b.** $[0{,}134; 0{,}238]$
   c. $[0{,}191; 0{,}281]$ **d.** $[0{,}192; 0{,}280]$
3. La taille n de l'échantillon choisi afin que l'amplitude de l'intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 soit inférieure à 0,01, vaut :
   a. 200 **b.** 400 **c.** 21167 **d.** 27707
4. Dans un échantillon de 250 jeunes fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, 99 sont des filles.
   Au seuil de 95 %, un intervalle de confiance de la proportion de filles parmi les fumeurs réguliers âgés de 15 à 19 ans est : (*les bornes de chaque intervalle sont données à 10^{-2} près*)
   a. $[0{,}35; 0{,}45]$ **b.** $[0{,}33; 0{,}46]$
   c. $[0{,}39; 0{,}40]$ **d.** $[0{,}30; 0{,}50]$

Sujets de baccalauréat

22 *(2014, métropole). QCM.*
Partie A – Après réalisation d'une enquête, on estime que le temps en minutes, consacré quotidiennement par un élève à faire ses devoirs scolaires, est une variable aléatoire X suivant une loi normale, d'espérance 60 et d'écart type 15.
L'allure de la courbe de densité de cette loi normale est représentée ci-dessous.
L'égalité $P(X \leq 40) = 0{,}0912$ est illustrée graphiquement.



1. La probabilité qu'un élève consacre quotidiennement plus de 80 minutes à faire ses devoirs scolaires est :
   a. $0{,}0912$ **b.** $0{,}8076$ **c.** $0{,}8$ **d.** $0{,}9088$
2. La probabilité qu'un élève consacre quotidiennement moins d'une heure à faire ses devoirs scolaires est :
   a. $0{,}5$ **b.** $0{,}6$ **c.** 1 **d.** $0{,}1368$

Partie B – Dans un lycée, on a noté l'évolution du nombre d'élèves possédant un téléphone portable avec accès à Internet.

- Entre 2011 et 2012, ce nombre a augmenté de 20 % ;
- entre 2012 et 2013, ce nombre a baissé de 25 %.

1. Le taux d'évolution global entre 2011 et 2013 est :
   a. -5 % **b.** -10 % **c.** 45 % **d.** $0{,}9$ %
2. Le taux d'évolution moyen annuel entre 2011 et 2013, arrondi à 0,1 % , est :
   a. $0{,}9$ % **b.** $-2{,}5$ % **c.** $-5{,}1$ % **d.** -5 %

Partie C – On procède à un contrôle technique de 100 scooters constituant un échantillon représentatif des scooters circulant dans une ville.
27 de ces scooters sont déclarés en mauvais état.
À partir de ce résultat, on souhaite estimer la proportion de scooters en mauvais état circulant dans la ville.
Un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, pour la proportion de scooters en mauvais état dans la ville est :
a. $[0{,}26; 0; 28]$ **b.** $[0{,}2; 0{,}3]$
c. $[0{,}17; 0{,}37]$ **d.** $[0{,}27; 0{,}95]$

23 *(2015, Polynésie).*
Partie A – On a prouvé qu'une des origines d'une maladie était génétique. On estime que 0,1 % de la population est porteur du gène en cause. Lorsqu'un individu est porteur du gène, on estime à 0,8 la probabilité qu'il développe la maladie.
Mais s'il n'est pas porteur du gène il y a tout de même une probabilité de 0,01 qu'il développe la maladie.
Lorsqu'un individu est choisi au hasard dans la population, on considère les évènements suivants :

- G : « le patient est porteur du gène » ;
- M : « le patient développe la maladie ».

1. Réaliser un arbre résumant les données.
2. Quelle est la probabilité de l'évènement « le patient est porteur du gène et il développe la maladie » ?
3. Sachant qu'il a développé la maladie, quelle est la probabilité à 0,0001 près qu'il soit porteur du gène ?

Partie B – Un laboratoire pharmaceutique fabrique un traitement préventif pour éviter la survenue de cette mala-

die. Il avertit que 30 % des patients traités auront des effets secondaires.
Plusieurs études sont réalisées par différents médecins et des patients volontaires pour vérifier les estimations du laboratoire. Les médecins sont invités à rentrer leurs données dans un logiciel qui utilise l'algorithme ci-dessous :

```
Variables :
  n, s sont des entiers
  a, b sont des nombres réels
Entrée :
  Afficher « Entrer le nombre de patients traités »
  Saisir n
  Afficher « Entrer le nombre de patients ayant eu des effets secondaires »
  Saisir s
Traitement :
  a prend la valeur 0,3 − 1/√n
  b prend la valeur 0,3 + 1/√n
  Si a ≤ s/n ≤ b
    Alors afficher : « résultats conformes »
    Sinon afficher : « résultats non conformes »
  Fin Si
```

1. Un médecin a traité 150 patients ; parmi ceux-ci, 40 ont eu des effets secondaires.
   Quel sera le résultat affiché par ce logiciel ?
2. Pour un autre, sur 200 patients, 75 ont eu des effets secondaires.
   Qu'affichera alors le logiciel ?
3. Que représente dans cet algorithme l'intervalle $[a; b]$?

24 *(2015, métropole – La Réunion).*
Partie A – Pour entrer dans un parc aquatique, il y a deux modes de paiement possibles :

- à distance par Internet ;
- sur place aux caisses du parc.

Le responsable marketing réalise une enquête auprès des visiteurs pour mesurer la part des ventes de billets par Internet. Il distingue deux catégories de visiteurs : ceux qui résident dans le département d'implantation du parc et ceux qui résident dans un autre département.
À l'issue de l'enquête le responsable constate que :

- 35 % des visiteurs résident dans le département ;
- parmi les visiteurs résidant dans le département, 55 % ont acheté leur billet aux caisses du parc ;
- parmi les visiteurs résidant dans un autre département, 80 % ont acheté leur billet sur Internet.

On interroge au hasard un visiteur présent dans le parc.
On note C et D les évènements :

- C : « le visiteur a acheté son billet d'entrée aux caisses du parc » ;
- D : « le visiteur réside dans le département d'implantation du parc ».

1. **a.** Donner les probabilités $P(D)$ et $P_D(C)$.
   b. Réaliser un l'arbre de probabilités.
2. **a.** Traduire mathématiquement l'événement « le visiteur ne réside pas dans le département d'implantation du parc et a acheté son billet par Internet », puis calculer sa probabilité.
   b. Le directeur affirme qu'il est nécessaire de restructurer le site Internet car moins des trois-quarts des visiteurs achètent leur billet en ligne. Que pensez-vous de cette affirmation ?

Partie B – Une des attractions du parc, une descente de type rafting dans des bouées géantes, attire beaucoup de visiteurs.
Les normes de sécurité imposent que le bassin d'arrivée contienne un volume d'eau compris entre 150 et 170 m^3 d'eau. Chaque soir, à la fermeture du parc, l'équipe de maintenance effectue des vérifications et décide, ou non, d'intervenir. Le volume d'eau (exprimé en m^3) contenu dans le bassin, à la fin d'une journée d'exploitation de cette attraction, est modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance $\mu = 160$ et d'écart type $\sigma = 5$.

1. **a.** Calculer $P(160 \leq X \leq 170)$.
   b. En déduire la probabilité que l'équipe de maintenance soit obligée d'intervenir pour respecter les normes de sécurité.
2. Quelle est la probabilité que l'équipe de maintenance soit obligée, pour respecter les normes, de rajouter de l'eau dans le bassin à la fin d'une journée d'ouverture ?

Partie C – Pour le repas du midi, les visiteurs restant toute la journée dans le parc peuvent :

- soit déjeuner dans l'un des restaurants du parc ;
- soit consommer, sur une aire de pique-nique, un repas qu'ils ont apporté.

La direction souhaite estimer la proportion p de visiteurs déjeunant dans l'un des restaurants du parc.
Un sondage est effectué à la sortie du parc : 247 visiteurs parmi 625 ont déjeuné dans l'un des restaurants du parc.
Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion p de visiteurs déjeunant dans l'un des restaurants du parc.

25 *(2014, Liban, S, extrait).* Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des cônes de glace.

Partie A – Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2 000 pour la vente en gros.
On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à 0,003.
On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2 000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans ce lot.
On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.
2. Si un client reçoit un lot contenant au moins 12 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de celui-ci.
   Déterminer la probabilité qu'un lot ne soit pas échangé ; le résultat sera arrondi au millième.

Partie C – Une étude réalisée en l'an 2000 a permis démontrer que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces était de 84 %.
En 2010, sur 900 personnes interrogées, 795 d'entre elles déclarent consommer des glaces.
Peut-on affirmer, au niveau de confiance de 95 % et à partir de l'étude de cet échantillon, que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre les années 2000 et 2010 ?